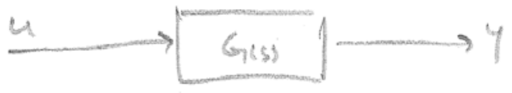
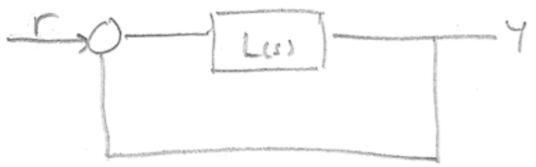
Reglerteknik   Fö 1 · LV 4

19/4 -10



Återkopplat system



$$G_{ry}(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

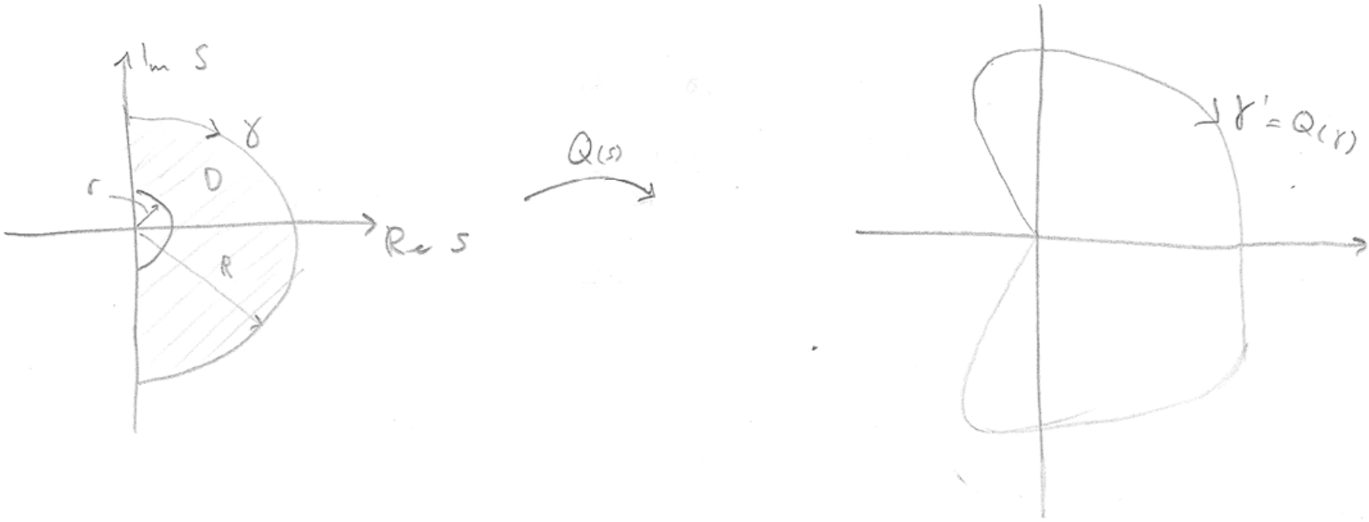
Vad händer då $L(s)$ innehåller en tidsfördröjning (dvs e^{-sL} ingår i $L(s)$)?

Vi behöver mer matematik!

Stabilitetsanalys: Fullständiga Nyquistkriteriet

Används för stabilitetsanalys av återkopplat system då kretsöverföringen innehåller dödtider.

Betrakta följande situation:



När s genomlöper kurvan γ kommer Q(s) att genomlöpa kurvan γ'.

Z = antalet nollställen till Q(s) i det slutna området D.

P = antalet poler för Q(s) i området D.

N = antalet varv i medursriktning som kurvan γ' omsluter origo.

Cauchys argumentationsprincip säger att

$$N = Z - P$$

Användningsområde: Stabilitetsanalys av återkopplade system

$$G_{ry}(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

Låt $L(s) = \frac{B(s)}{A(s)} e^{-sL}$ där $A(s)$, $B(s)$ är polynom i s

$$G_{ry}(s) = \frac{\frac{B(s)}{A(s)} e^{-sL}}{1 + \frac{B(s)}{A(s)} e^{-sL}}$$

Stabiliteten för $G_{ry}(s)$ avgörs om det finns någon lösning till:

$$1 + \frac{B(s)}{A(s)} e^{-sL} = 0 \quad \text{i HHP}$$

Då $r \to 0$ och $R \to \infty$ kommer kurvan γ att innesluta HHP.

Avbildningen av $Q(s) = 1 + L(s) = 1 + \frac{B(s)}{A(s)} e^{-sL} = \frac{A(s) + B(s) e^{-sL}}{A(s)}$

Z = antalet nollställen för $1 + L(s)$ i HHP (detta är antalet poler för $G_{ry}(s)$ i HHP)

P = antalet poler för $1 + L(s)$ i HHP =
= antalet poler för $L(s)$ i HHP

N = antalet varv i medurs riktning som kurvan γ' omsluter origo

Det återkopplade systemet är stabilt då $Z = 0$, dvs $N = -P$

Det blir ofta enklare att låta $Q(s) = L(s)$ och räkna omslutningar kring -1 (istället för origo)

Z = antalet poler för $G_{ry}(s)$ i HHP.

P = antalet poler för $L(s)$ i HHP.

N = antalet varv i medurs riktning som kurvan γ' omsluter runt punkten -1

Stabilitetsvillkor: $N = -P$

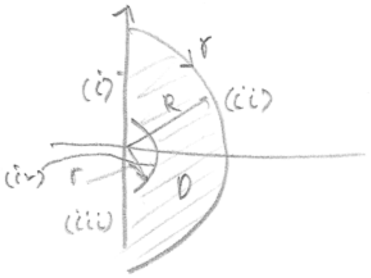
Exempel: Fullständiga Nyquist

Bestäm för vilka K_p det återkopplade systemet är stabilt.

$$r \rightarrow \bigcirc \rightarrow \boxed{K_p} \rightarrow \boxed{\frac{e^{-s}}{s}} \rightarrow y$$

$$L(s) = K_p \frac{e^{-s}}{s}$$

Betrakta avbildningen av $L(s)$ då s genomlöper kurvan γ.



(i) ... (iv) är olika segment i kurvan.
Beskriver hur man går.

Segment i $\quad s = j\omega, \quad r < \omega < R$

$$L(j\omega) = \frac{e^{-j\omega}}{j\omega} = \frac{\cos(\omega) - j\sin(\omega)}{j\omega} = \frac{-(\sin(\omega) + j\cos(\omega))}{\omega}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$$ (långt från origo för små ω och nära origo för stora ω)

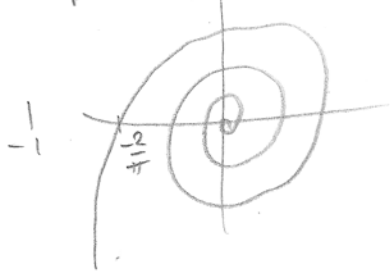
$$\arg L(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega$$ (obegränsat stor fasvridning)

För vilka frekvenser skär avbildningen reella-axeln?
Då Im-delen är noll, dvs då $\frac{\cos(\omega)}{\omega} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{(2n+1)\pi}{2}$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\Rightarrow L(j\omega_0) = \frac{-\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)}{\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)}\left(\frac{2}{\pi}\right), \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

$K_p = 1$



Segment ii

$s = Re^{i\theta}$, $\theta: \frac{\pi}{2} \to 0 \to -\frac{\pi}{2}$

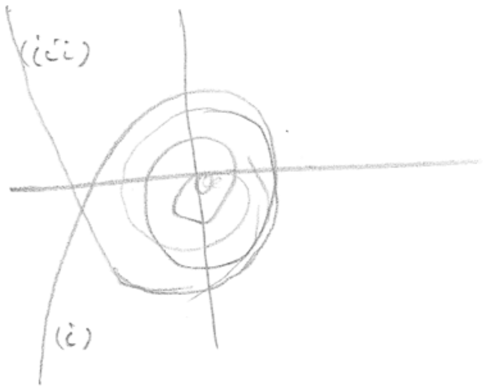
$$L(Re^{i\theta}) = \frac{e^{-Re^{i\theta}}}{Re^{i\theta}}$$

Då $R \to \infty$ så gäller att $|L(Re^{i\theta})| \to 0$ (mot origo)

Segment iii

$s = j\omega \qquad -R < \omega < -r$

$L(j\omega) = \overline{L(j\omega)}$ (spegling i reella-axeln)



Segment iv

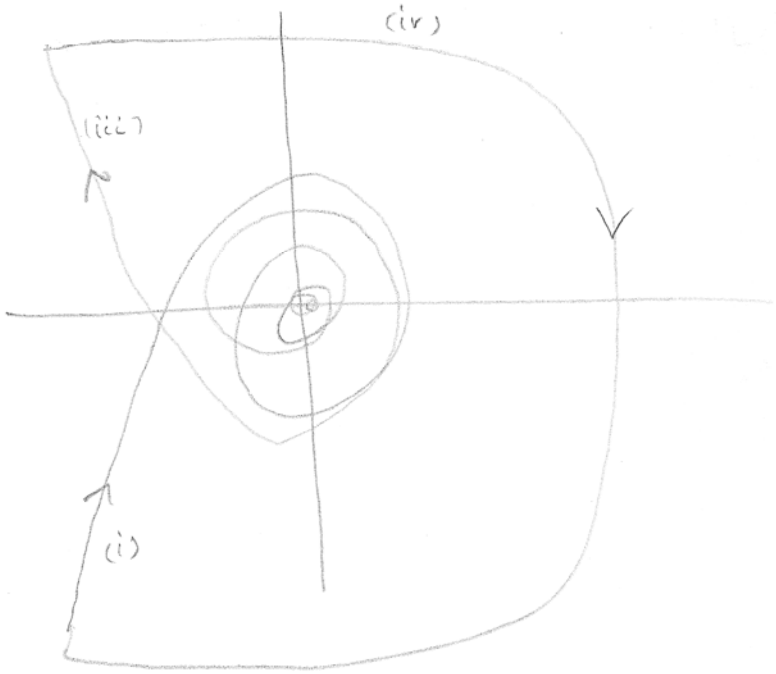
$s = re^{i\theta}$, $\theta: -\frac{\pi}{2} \to 0 \to \frac{\pi}{2}$

$$L(re^{i\theta}) = \frac{e^{-re^{i\theta}}}{re^{i\theta}}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} |L(re^{i\theta})| \to \infty & \text{då } r \to 0 \\ \arg L(re^{i\theta}) \to \frac{\pi}{2} & \text{då } r \to 0 \end{cases}$$

$$\theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} |L(re^{i\theta})| \to \infty & \text{då } r \to 0 \\ \arg L(re^{i\theta}) \to 0 & \text{då } r \to 0 \end{cases}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{— '' —} \quad \begin{matrix} \to \infty & \text{då } r \to 0 \\ \to -\frac{\pi}{2} & \text{då } r \to 0 \end{matrix}$$



Stabilitetsanalys:

$P = 0$ (i området D)

N är antalet medursvarv för γ' kring punkten -1.

$N = Z - P \Rightarrow Z = N + P = 0 + 0 = 0$

Eftersom $Z = 0$ då $K_p = 1$ så är $G_{ry}(s)$ stabil i detta fall.

Det återkopplade systemet är stabilt då $0 < K_p < \frac{\pi}{2}$

Nyqvists förenklade stabilitetskriterium

Då $L(s)$ saknar poler i HHP samt på imaginär axeln utanför origo så gäller att $\frac{L(s)}{1+L(s)}$ (ex. $G_{ry}(s)$) är insignal-utsignal stabil om kurvan $L(j\omega)$ $(0 < \omega < \infty)$ passerar till höger om punkten -1.

Stabilitetsmarginaler då Nyqvist förenklade kriterium gäller

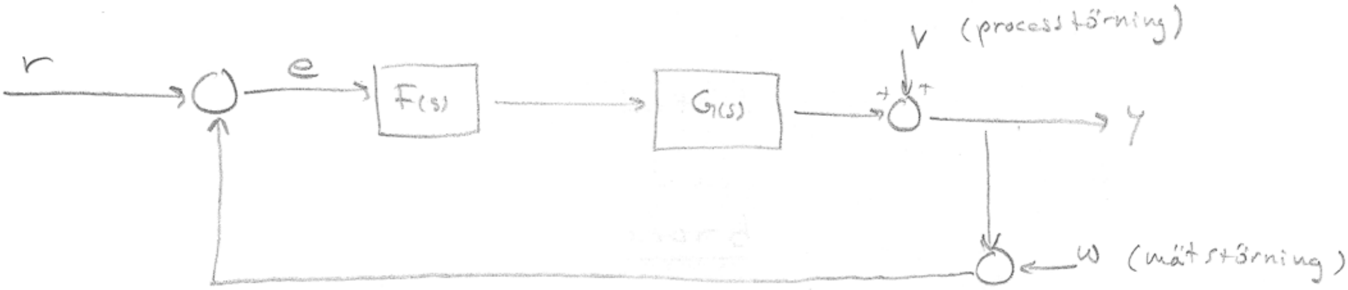
Amplitudmarginal, (A_m):
$$A_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$

dvs, A_m anger hur många gånger förstärkningen i $L(s)$ kan öka innan det återkopplade systemet blir instabilt.

Fasmarginal, (φ_m):
$$\varphi_m = \arg L(j\omega_c) - (-180°)$$

där ω_c är den frekvens där det gäller att $|L(j\omega_c)| = 1$
Fasmarginalen är ett mått på hur mycket fasvridningen kan öka innan det återkopplade systemet blir instabilt.

Motsättningar vid regulatordimensionering



$$Y(s) = \underbrace{\frac{F(s)\,G(s)}{1+F(s)\,G(s)}}_{G_{ry}(s)} \cdot R(s) + \underbrace{\frac{1}{1+F(s)\,G(s)}}_{G_{vy}(s)} V(s) + \underbrace{\frac{F(s)\cdot G(s)}{1+F(s)\,G(s)}}_{G_{wy}(s)} W(s)$$

Inför $L(s) = F(s)\,G(s)$

$$\begin{cases} S(s) = \dfrac{1}{1+L(s)} & \text{"känslighetsfunktionen"} \\[2ex] T(s) = \dfrac{L(s)}{1+L(s)} & \text{"komplementära känslighetsfunktionen"} \end{cases}$$

$$\underline{Y(s)} = T(s)\cdot \underline{R(s)} + S(s)\,\underline{U(s)} + T(s)\cdot \underline{W(s)}$$

Önskemål på reglersystemet:

(i) $y(t)$ ska följa $r(t)$ $\Rightarrow T(s) \approx 1$

(ii) $v(t)$ och $w(t)$ ska <u>inte</u> påverka $y(t)$ $\Rightarrow \begin{cases} S(s) \approx 0 \\ T(s) \approx 0 \end{cases}$

Notera att $S(s) + T(s) = \dfrac{1}{1+L(s)} + \dfrac{L(s)}{1+L(s)} = 1$

Motsättningar:

(i) och (ii) har motstridiga önskemål om $T(s)$

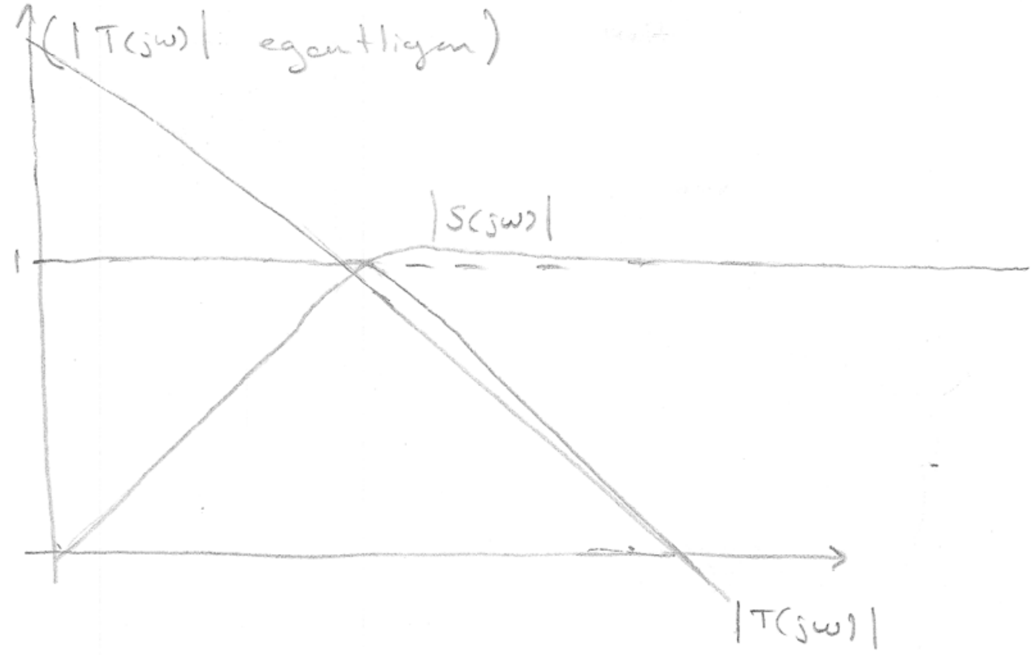
(ii) begränsas av att $S(s)$ och $T(s)$ inte kan vara små samtidigt eftersom $S + T = 1$

Observation:

- Börvärdesändringar (r) och processtörningar är normalt sett lågfrekventa
- Mätstörningar (w) är normalt sett högfrekventa.

Ansats:

Bestäm parametrar i regulatorn F(s) så T är nära 1 för låga frekvenser och nära 0 för höga frekvenser.



$S(s) + T(s) = 1$

$|S(j\omega) + T(j\omega)| \leq |S(j\omega)| + |T(j\omega)|$

$S(j\omega) = \dfrac{1}{1 + L(j\omega)} \qquad T(j\omega) = \dfrac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)}$

<u>Låga frekvenser (litet ω)</u>

Välj en regulator så att $|L(j\omega)|$ är stort

<u>Höga frekvenser (stort ω)</u>

Välj en regulator så att $|L(j\omega)|$ är litet