25 jan

SS Föreläsning 1 Lv 2

En vanlig form hos LT i ingenjörstillämpningar är som en kvot mellan polynom i s, ("rationell funktion")

$$X(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

Om rötterna till polynomet är kända kan uttrycket faktoriseras enligt:

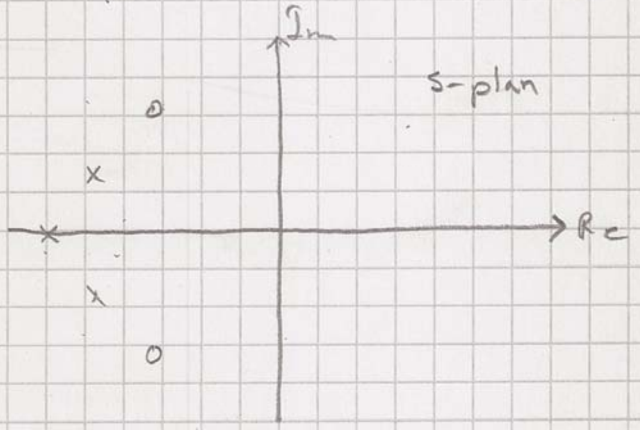
$$X(s) = \frac{b_M \prod_{k=1}^{M} (s - c_k)}{\prod_{k=1}^{N} (s - d_k)}$$

c_k: nollställe till $X(s)$ (rötter till täljarpolynomet).

d_k: poler till $X(s)$ (rötter till nämnarpolynomet)

Grafiskt beskrivning

Symboler: c_k = "o", d_k = "x"



Grafen innehåller all information om $X(s)$ förutom koefficienten b_M

Invers Laplacetransform

Utgå från $X(s) = \dfrac{B(s)}{A(s)}$ ← polynom i s ordn. M (täljaren), polynom i s ordn. N (nämnaren)

Om $M \geq N$, Dividera

$$X(s) = \sum_{k=0}^{M-N} g_k s^k + \frac{\tilde{B}(s)}{A(s)}$$ ← polynom ordn N-1

Partialbråkuppdela $\dfrac{\tilde{B}(s)}{A(s)}$ (Bryt upp i mindre delar)

Inverstransformera varje term för sig (tabell)

- Första ordningens termer $\dfrac{A_k}{s-d_k} \xleftrightarrow{LT} A_k e^{d_k t} u(t)$

- Andra ordningens termer (komplexa rötter)

Efter kvadratkomplettering fås termer som:

$$\frac{C_1(s+a)}{(s+a)^2+\omega_0^2} \xleftrightarrow{LT} C_1 e^{-at}\cos(\omega_0 t)\,u(t)$$

$$\frac{C_2 \omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2} \xleftrightarrow{LT} C_2 e^{-at}\sin(\omega_0 t)\,u(t)$$

Från tabell:

$$\cos(\omega_0 t)\,u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\sin(\omega_0 t)\,u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

$$e^{-at} x(t) \xleftrightarrow{LT} X(s+a)$$

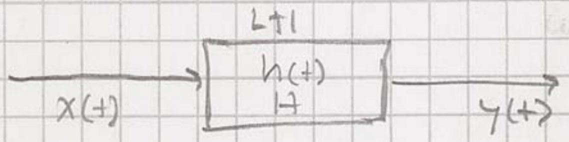
Vilka rötter har polynomet?

$$(s+a)^2 + w_0^2 = s^2 + s \cdot 2a + a^2 + w_0^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - (a^2 - w_0^2)} = -a \pm \sqrt{-w_0^2} = -a \pm w_0 \sqrt{-1} =$$

$$s_{1,2} = -a \pm j w_0$$

Systemanalys



$h(t)$: Systemets impulssvar

Samband: $y(t) = h(t) * x(t)$

Laplacetransform:

$Y(s) = H(s) \cdot X(s)$ med

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$$
$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$
$$\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s)$$

$H(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$, systemets överförings funktion.

Antag att vi har ett kausalt LTI-system
med impulssvar $h(t) = 0, \quad t < 0$

Vidare antas att $H(s)$ är en rationell funktion

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad \text{kvot mellan polynom i } s.$$

Vi kan då faktorisera:

$$H(s) = \frac{B(s)}{\underbrace{(s-d_1)}_{\text{1:a ordningen}}\underbrace{(s-\alpha+j\omega)(s-\alpha-j\omega)}_{\text{Komplexa poler. Uppträder alltid som konjugatpar}}()()()}$$

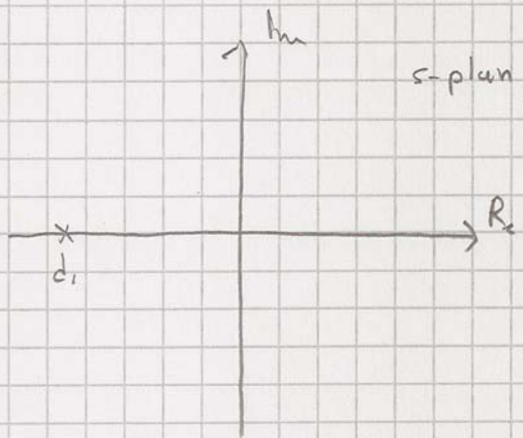
Efter partialbråkuppdelning fås termer som:

$$\frac{k_1}{s-d_1} \xleftrightarrow{LT} k_1 e^{d_1 t} u(t) \to 0$$

om $d_1 < 0$
då $t \to \infty$

$s = d_1$: en pol till $H(s)$

$d_1 < 0$ betyder pol i vänstra halvplanet.
(Krav för stabilitet)



För de komplexa polerna, $(s = \alpha \pm j\omega)$, fås följande termer efter partialbråkuppdelning:

$$\frac{K_2}{s-\alpha+j\omega} + \frac{K_2}{s-\alpha-j\omega} = \{K_2 : \text{en komplex konst.}\} =$$

$$\frac{K_2(s-\alpha-j\omega) + K_2^*(s-\alpha+j\omega)}{(s-\alpha+j\omega)(s-\alpha-j\omega)} = \left\{\begin{matrix} K_2 = A + jB, \\ K_2^* = A - jB \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{(A+jB)(s-\alpha-j\omega) + (A-jB)(s-\alpha+j\omega)}{(s-\alpha)^2 + \omega^2} =$$

$$= \frac{A(s-\alpha) - \cancel{jA\omega} + \cancel{jB(s-\alpha)} + \omega B + A(s-\alpha) + \cancel{j\omega A} - \cancel{jB(s-\alpha)} + \omega B}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}$$

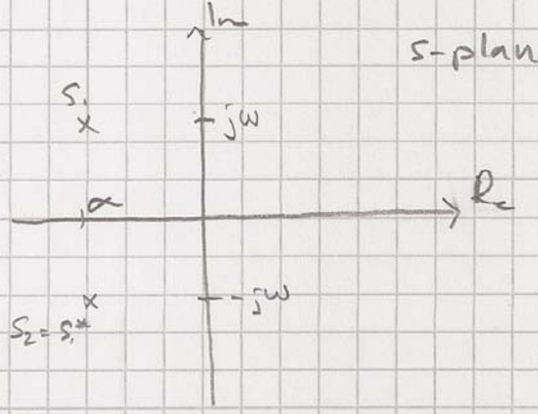
$$= \frac{2A(s-\alpha) + 2B\omega}{(s-\alpha)^2 + \omega^2} = 2\,\mathrm{Re}\{K_2\} \cdot \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2} + 2\,\mathrm{Im}\{K_2\} \frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$$

Invers LT ger termerna:

$$\left[2\,\mathrm{Re}\{K_2\} e^{\alpha t}\cos(\omega t) + 2\,\mathrm{Im}\{K_2\} e^{\alpha t}\sin(\omega t)\right] u(t)$$

Dessa termer $\to 0$ om $\alpha < 0$

∴ Re-delen till de komplexa polerna < 0
(De ligger då i vänstra halvplanet)



Alltså;

För att ett kausalt system ska vara stabilt krävs att polerna till dess överföringsfunktion ligger i vänstra halvplanet.

Vid praktiska beräkningar
$(a, b, c \in \mathbb{R})$

Partialbråkuppdelning av

$$\frac{1}{\underbrace{(s+a)}_{\text{en reell pol}}\underbrace{(s^2+bs+c)}_{\text{komplexa poler}}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ansätt} \\ \text{partialbråkuppdelning} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{A}{s+a} + \frac{Bs+C}{s^2+bs+c} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Kvadrat-} \\ \text{komplettering} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{A}{s+a} + \frac{Bs+C}{(s+\sigma)^2+\omega^2}$$

justera koefficienter så att uttrycket stämmer mot Laplace-tabell.

Tillbakablick

$$\Chi(s) = \int_0^\infty x(t)\, e^{-st}\, dt \quad , \ x(t) = 0 \text{ för } t < 0$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$\Chi(s) = \int_0^\infty x(t)\, e^{-(\sigma + j\omega)t}\, dt = \int_0^\infty x(t)\, e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

$= FT\left\{ x(t) e^{-\sigma t} \right\}$. Om $\sigma = 0 \Rightarrow s = j\omega$ får vi

$$\Chi(s)\Big|_{s=j\omega} = \Chi(j\omega) = \int_0^\infty x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = FT\{x(t)\}$$

Om $x(t) = h(t)$ i ett impulssvar $H(j\omega) = FT\{h(t)\}$

Systemets frekvenssvar!

Egenskaper i frekvensplanet

Utgå från ~~att~~ linjärt, stabilt och kausalt system med överföringsfunktionen $G(s)$ och frekvenssvaret

$$G(j\omega) = G(s)\Big|_{s=j\omega}$$

(stabilt: $j\omega$-axeln ligger i ROC)

Bodediagrammet

En grafisk presentation av frekvenssvaret.

Två delar

- Amplituddiagram (belopp)
  - Logaritmisk frekvensskala
  - Logaritmisk amplitudskala (dB)
  - $$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \, {}^{10}\log |G(j\omega)|$$
- Fasdiagram
  - Logaritmisk frekvensskala

Konstruktion

Faktorisera $G(s) = \dfrac{C_1(s)\ C_2(s) \dots C_M(s)}{D_1(s)\ D_2(s) \dots D_N(s)}$

Faktorerna D_i C_i är

K, en konstant

s, derivering / integrering

$1 + \frac{s}{\omega_1}$, 1:a grads faktor

$1 + s\frac{2\alpha}{\omega_2} + s^2\frac{1}{\omega_2^2}$

Frekvenssvarets belopp

$G(j\omega) = \dfrac{|C_1(j\omega)|\,|C_2(j\omega)| \dots |C_M(j\omega)|}{|D_1(j\omega)|\,|D_2(j\omega)| \dots |D_N(j\omega)|}$ uttryckt i dB

$$|G(j\omega)|_{dB} = |C_1(j\omega)|_{dB} + \dots + |C_M(j\omega)|_{dB} - |D_1(j\omega)|_{dB} - \dots - |D_N(j\omega)|_{dB}$$

Frekvenssvarets fas blir

$$\arg\{G(j\omega)\} = \arg\{C_1(j\omega)\} + \dots + \arg\{C_M(j\omega)\} -$$

$$- \arg\{D_1(j\omega)\} - \dots - \arg\{D_N(j\omega)\}$$