Föreläsning 2 S3

27 jan

## Diskreta signaler och system

## Z-transform

Låt $x[n] = z^n$ vara en insignal till ett diskret LTI-system, där $n \in \mathbb{Z}$

$z \in \mathbb{C}$

Systemets impulssvar är $h[n]$

$$x[n] \longrightarrow \overset{\text{LTI}}{\boxed{h[n]}} \longrightarrow y[n]$$

Faltningssumman ger:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, z^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, z^{n} \cdot z^{-k} = z^{n} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, z^{-k}}_{H(z)}$$

$H(z)$ är z-transformen av den diskreta signalen $h[n]$

Definition: z-transform av den diskreta signalen $x[n]$ är:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, z^{-k}$$

↑ Dubbelsidig

$k=0$ som undre gräns $\Rightarrow$ enkelsidig

## Några vanliga transformpar

- Enhetssteget

$x[n] = u[n]$

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^{k} = \begin{Bmatrix} \text{Geometrisk} \\ \text{Summa} \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Summan konvergerar om $|z^{-1}| < 1$

$$\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 1$$

Konvergensområde
(ROC)

$$u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \qquad \text{ROC: } |z| > 1$$

## Enhetspuls

$$x[n] = \delta[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

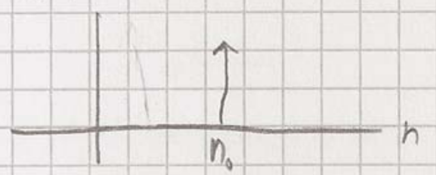
$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1$$

$$\delta[n] \xleftrightarrow{Z} 1 \qquad \text{ROC: } \forall z$$

## Fördröjd enhetspuls

$$x[n] = \delta[n-n_0] = \begin{cases} 1, & n=n_0 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Låt $n_0 > 0$




$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-n_0] z^{-n} = z^{-n_0}$$

$$\delta[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} \qquad \text{ROC: } z \neq 0$$

## Exponentiell signal

$x[n] = a^n \cdot u[n]$, $a$ en konstant

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \left\{ \begin{array}{l} \text{Geom. Serie.} \\ \text{Konvergerar om} \\ \left|\frac{a}{z}\right| < 1 \end{array} \right\}$$

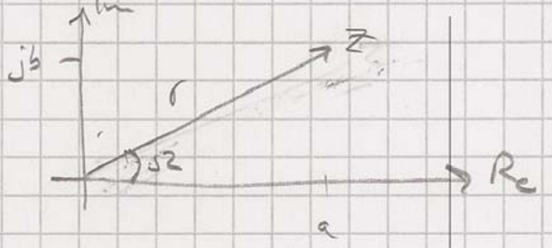
$$= \frac{1}{1-az^{-1}} = a^n u[n] \xleftrightarrow{\ z\ } \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

med ROC : $|z| > |a|$

(enhetssteg motsvarar $a=1$)

## $z$ är en komplex variabel ($z \in \mathbb{C}$)

$z = a - jb = re^{j\Omega}$




$|z| = r$

$$z^n = (re^{j\omega})^n = r^n(\cos\Omega n - j\sin\Omega n)$$

Antag en diskretsignal $x[n]$ där

$x[n] = 0$ för $n < 0$

$$X(z) = X(re^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n](re^{j\Omega})^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\Omega n}$$

För att summan ska konvergera ($z$-transformen existerar) måste:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty$$

De värden på $z$ som gör att $X(z)$ konvergerar kallas konvergensområde (ROC)

Notera att endast $|z| = r$ inverkar på ROC.

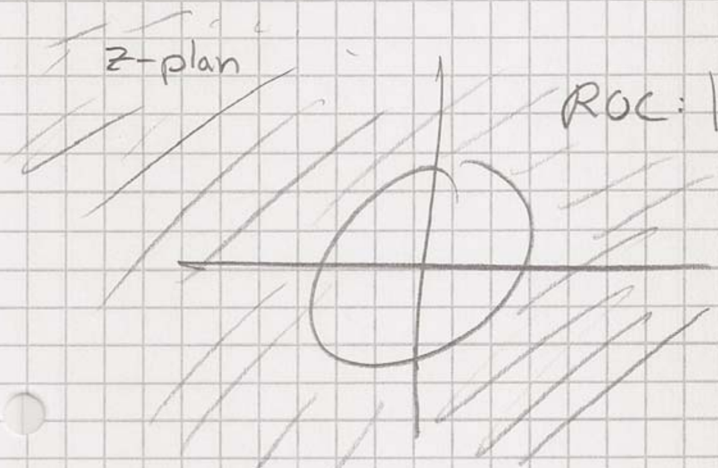
För vår kausala signal $x[n]$

Om $X(z)$ konvergerar för $r = r_0$ så konvergerar det även för $r > r_0$

Alltså ROC utgör området utanför en cirkel med centrum i origo.

Exempel med vår exponentiella signal

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - a z^{-1}}$$




ROC: $|z| > a$

# Egenskaper

- Linjär transform (liksom Laplace transformen)

Låt

$$x_1[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z)$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_2(z)$$

$a, b$ konstanter

$$a x_1[n] + b x_2[n] \xleftrightarrow{z} aX_1(z) + bX_2(z)$$

- Fördröjning

Låt $x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$

där $x[n] = 0$, $n < 0$ och $n_0 > 0$

$$x[n-n_0]\, u[n-n_0] \xleftrightarrow{z} \sum_{n=0}^{\infty} x[n-n_0]\, u[n-n_0] \cdot z^{-n}$$

$$= \sum_{n=n_0}^{\infty} x[n-n_0]\, z^{-n} = \begin{cases} k = n - n_0 \\ n = k + n_0 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} n & k \\ \hline n_0 & 0 \\ \infty & \infty \end{array}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x[k]\, z^{-(k+n_0)} = z^{-n_0} \sum_{k=0}^{\infty} x[k]\, z^{-k} = z^{-n_0} \cdot X(z)$$

## Dämpning

Låt $x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$

$$a^n x[n] \xleftrightarrow{z} \sum_{n=0}^{\infty} a^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] (a z^{-1})^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right) \qquad \left( X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \right)$$

## Faltning

$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$

$y[n] \xleftrightarrow{z} Y(z)$

$$\mathcal{Z}\{x[n] * y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[n-k] \right) z^{-n} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-k] z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-k] z^{-(n-k)} \cdot z^{-k} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-k] z^{-(n-k)} = \left\{ m = n-k \quad \begin{array}{c|c} n & m \\ \hline -\infty & -\infty \\ +\infty & \infty \end{array} \right\} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y[m] z^{-m} = X(z) \cdot Y(z)$$

$$x[n] * y[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \cdot Y(z)$$

Otroligt väntat!