Övning 1 Lv 2

26 jan
Oscar

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \qquad a_n \neq 0$$

Faktorisera nämnaren

$$a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = a_n(s-p_1)\dots(s-p_n)$$

$p_1, \dots, p_n$ kallas poler

$$Y(s) = H(s)\,X(s) = \{PBU\} = \underbrace{\frac{b_n}{a_n} + \frac{k_1}{s-p_1} + \dots + \frac{k_n}{s-p_n}}_{\text{Beror på systemet}} + \underbrace{Y_x(s)}_{\text{Beror på insignalen}}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \Rightarrow y(t) = \underbrace{\frac{b_n}{a_n}\delta(t) + k_1 e^{p_1 t} + \dots + k_n e^{p_n t}}_{} + y_x(t) =$$

$$y_c(t) + y_x(t)$$

$\delta(t), e^{p_1 t}, \dots, e^{p_n t}$ kallas systemets moder

För stabilitet måste $Re(p_i) < 0$

$$|e^{a+jb}| = |e^a||e^{jb}| = |e^a|\,\underbrace{|\cos b + j\sin b|}_{1} = |e^a|$$

dvs alla $H(s)$:s poler $\in$ VHP (Vänstra halvplanet)

Systemets karaktäristiska ekv.

$$a_n(s-p_1)\dots(s-p_n) = 0$$

alltså $H(s)$:nämnare $= 0$

7.18

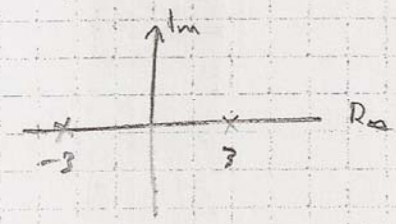
2:a ordningens system, $H(s)$

Rita poler och nollställen, redovisa systemets moder och bestäm $H(s)$ så att:

a/ Systemet är instabilt.

Stabilitet $\Leftrightarrow$ Alla poler $\in$ VHP dvs $Re(p_i) < 0$

Tag poler i:



Moder: $\frac{1}{s+a} \xleftrightarrow{L} e^{-at}$

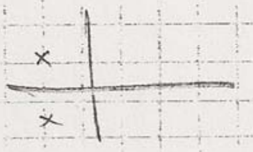
e^{-3t}, e^{3t}

$$H(s) = \frac{K}{(s-3)(s+3)}$$

b/ Systemet är stabilt

Alla poler $\in$ VHP

Tag poler i:



$p_1 = -1 + j$

$p_2 = -1 - j$

Moder: $e^{(-1+j)t}, e^{(-1-j)t}$

$$H(s) = \frac{K}{(s+1-j)(s+1+j)}$$

4 Systemet impulssvar inte innehåller en dämpad sinus-signal.

$$H(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \Rightarrow h(t) = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t} = Ae^{-at} + Be^{-bt} \quad , \quad t > 0$$

Fall 1: a, b reella

$$h(t) = Ae^{-at} + Be^{-bt} \quad , \quad t > 0$$

innehåller inga sinussignaler

Fall 2: a, b komplexa

a, b rötter till en 2:a-gradsekv. med reella koeff.

$$\Rightarrow a = b^* \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} a = \alpha + j\beta \\ b = \alpha - j\beta \end{cases}$$

$$h(t) = Ce^{-(\alpha+j\beta)t} - Ce^{-(\alpha-j\beta)t} =$$

$$= Ce^{-\alpha t}\left(e^{-j\beta t} - e^{j\beta t}\right) = -2jCe^{-\alpha t}\sin\beta t \quad , \quad t > 0$$

innehåller en dämpad / förstärkt sinussignal

Fall 3: a,b rent imaginära

Som fall 2 med $\alpha = 0$

$\Rightarrow h(t) = -2jC \sin\beta t \,, \quad t > 0$

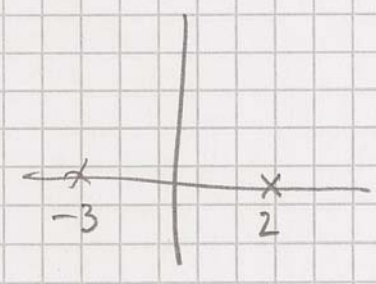
odämpad sinussignal

Tillbaka till uppgiften

Vi vill inte ha en dämpad sinussignal

$\Rightarrow$ Fall 1 och 3 är OK!

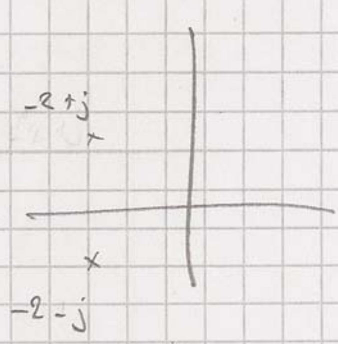
Fall 1: $H(s) = \dfrac{1}{(s+3)(s-2)}$



Moder: e^{-3t}, e^{2t}

d) $h(t)$ innehåller en dämpad sinussignal

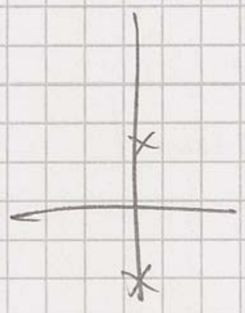
$$H(s) = \frac{1}{(s+2-j)(s+2+j)}$$



Moder: $e^{(-2+j)t}$, $e^{(-2-j)t}$

e/ $h(t)$ innehåller en dämpad sinussignal

Fall 3: $H(s) = \dfrac{1}{(s+j)(s-j)}$



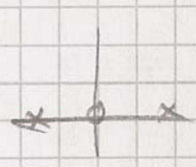
Moder: e^{-jt}, e^{jt}

f/ $H(j\omega) \to$ konstant då $\omega \to +\infty$

$$H(s) = \frac{As^2 + Bs + C}{as^2 + bs + c} = [s = j\omega] = \frac{A(j\omega)^2 + B(j\omega) + C}{a(j\omega)^2 + b(j\omega) + c} \to$$

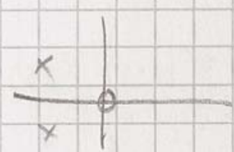
$$\to \frac{A}{a} \text{ då } \omega \to \infty$$

$H(s) = \dfrac{s^2}{(s+1)(s-1)}$



Moder: e^{t}, e^{-t}, $\delta(t)$

$\dfrac{(s+n_1)(s+n_2)}{(s+p_1)(s+p_2)}$



g/ $H(j\omega) \to 0$ då $\omega \to \infty$

$A = 0$ från uppg f dvs

grad P < grad Q , $H(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$

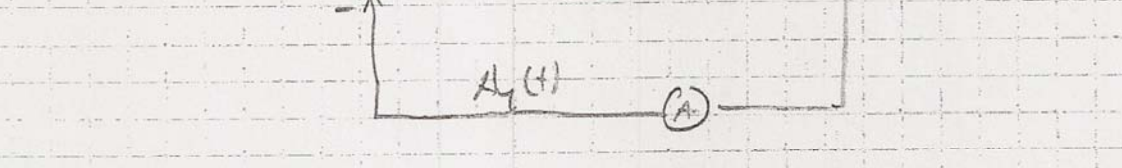
7.30 $h(t) = e^{t} u(t)$

a) Är systemet BIBO-stabilt?

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{s-1} \qquad \text{pol: } s_1 - 1 = 0 \Rightarrow s_1 = 1$$

Polen $\in$ HHP $\Rightarrow$ instabilt system!

b) Systemet återkopplas. Hitta den nya överförings-funktionen $H(s)$.



$$\begin{cases} w(t) = x(t) - Ay(t) \\ y(t) = w(t) * h(t) \end{cases} \quad \mathcal{L} \Rightarrow \begin{cases} W(s) = X(s) - AY(s) \\ Y(s) = W(s) \cdot H(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(s) = H(s) \cdot \left[X(s) - AY(s) \right] = H(s) X(s) - AH(s) Y(s)$$

$$\Leftrightarrow Y(s) \left[1 + AH(s) \right] = H(s) X(s)$$

$$H_f(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H(s)}{1 + AH(s)} = \frac{\frac{1}{s-1}}{1 + A \cdot \frac{1}{s-1}} =$$

$$= \frac{1}{s - 1 + A} = \frac{1}{s - (1-A)}$$

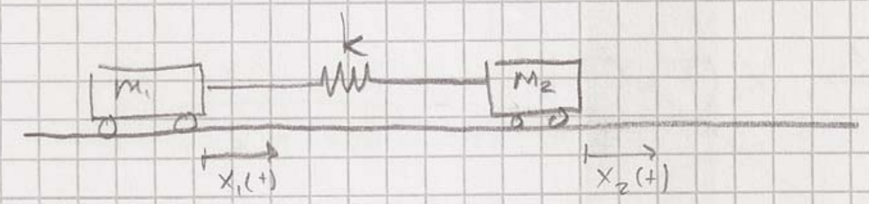
Pol: $s_1 - (1-A) = 0 \Rightarrow s_1 = 1 - A$

c) För vilken A är det återkopplade systemet BIBO-stabilt?

Stabilt om $\mathrm{Re}(s_1) < 0$

$\Leftrightarrow 1 - A < 0 \Leftrightarrow A > 1$

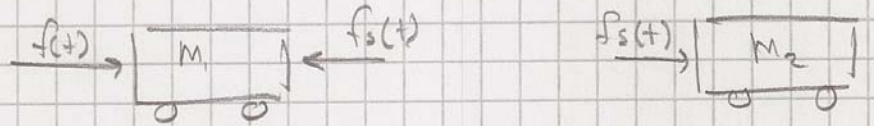
X2 Två friktionsfria vagnar, en ideal fjäder



Beräkna överföringsfunktionen om $f(t)$ är insignal och $x_2(t)$ är utsignal.

$$f(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow x_2(t)$$

Frilägg vagnarna:



Newton 2: $m_1 \ddot{x}_1(t) = f(t) - f_s(t)$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) = f_s(t)$$

$$f_s(t) = k(x_1(t) - x_2(t))$$

Eliminera f_s: $m_1 \ddot{x}_1(t) = f(t) - k(x_1(t) - x_2(t))$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) = k(x_1(t) - x_2(t))$$

Antag att systemet är i vila vid $t=0$

dvs: $x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0$

$$x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

$$\mathcal{L} \Rightarrow \begin{cases} m_1 s^2 X_1 = F - k(X_1 - X_2) & (1) \\ m_2 s^2 X_2 = k(X_1 - X_2) & (2) \end{cases}$$

Lös ut X_1 ur (2) och sätt in (1)

$$X_1 = \frac{X_2(m_2 s^2 + k)}{k} \qquad (3)$$

$$X_1 \left[m_1 s^2 + k\right] = F + k X_2 \iff$$

$$X_1 = \frac{F + k X_2}{m_1 s^2 + k} \overset{(3)}{\iff} X_2 \frac{(m_2 s^2 + k)}{k} = \frac{F + k X_2}{m_1 s^2 + k}$$

$$\iff X_2 \left[\left(\frac{m_2 s^2}{k} + 1 \right) \left(m_1 s^2 + k \right) - k \right] = F$$

$$H(s) = \frac{X_2}{F} = \frac{1}{\frac{m_1 m_2}{k} s^4 + m_2 s^2 + m_1 s^2 + k - k} =$$

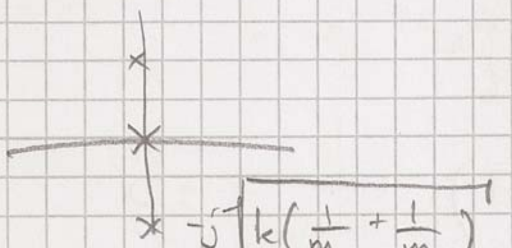
$$= \frac{1}{s^2 \left(\frac{m_1 m_2}{k} s^2 + (m_1 + m_2) \right)}$$

Dimensionanalys:

$$\frac{m_1 m_2}{k} s^2 \sim \frac{kg \cdot kg}{N \cdot m^{-1}} \cdot \frac{1}{s^2} =$$

$$= \frac{kg \cdot kg}{kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot m^{-1} \cdot s^2} = kg$$

Poler:



7.29 a) Hitta utsignalen för LTI-systemet m.h.a. LT

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)}$$

$$x(t) = 5e^{5t}u(t)$$

$$h(t) = u(t)$$

Strategi:

- LT $x(t)$ och $h(t)$
- $Y(s) = X(s) \cdot H(s)$
- Invers LT av $Y(s)$ ger svaret i tidsdomänen

Utförande

$$X(s) = \frac{1}{s-5}$$

$$H(s) = \frac{1}{s}$$

$$X(s)\,H(s) = \frac{1}{s-5}\;\frac{1}{s} = \frac{1}{s(s-5)}$$

Alt 1 PBU

Alt 2 Integration i tiden. Valt!

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau = \int_0^t e^{5\tau}u(\tau)\,d\tau = \int_0^t e^{3\tau}\,d\tau =$$

$$\left[\frac{e^{5\tau}}{5}\right]_0^t = \frac{e^{5t}}{5} - \frac{e^0}{5} = \underline{\underline{\frac{1}{5}\left(e^{3t}-1\right)}} \qquad t > 0$$